

Περίθλαση

Ο όρος περίθλαση (*diffraction*) χρησιμοποιήθηκε από τον Sommerfeld (1890) σαν την απόκλιση ακτίνων φωτός από την ευθύγραμμη πορεία τους που δεν μπορεί να αποδοθεί σε ανάκλαση ή διάθλαση.

Περίθλαση παρατηρούμε όταν η εγκάρσια έκταση του κύματος περιορίζεται, και γίνεται σημαντική όταν ο περιορισμός αυτός είναι της τάξης του μήκους κύματος της ακτινοβολίας.

Η μελέτη της περίθλασης ξεκινά με την περιγραφή του φαινομένου από τον Grimaldi (1665), όταν παρατήρησε την ακτινοβολία πίσω από ένα άνοιγμα μικρών διαστάσεων. Με βάση τη σωματιδιακή θεώρηση του φωτός, η σκιά στην επιφάνεια παρατήρησης αναμενόταν να είναι καλά ορισμένη και απότομη. Οι παρατηρήσεις έδειχναν τη μετάβαση από τη φωτεινή στη σκοτεινή περιοχή αρκετά ομαλά. Η πρώτη προσπάθεια εξήγησης ήρθε από τον Huygens το 1678. Σημαντική πρόοδος έγινε το 1804, όταν ο Young εισήγαγε την συμβολή και από τον Fresnel το 1818, όταν και ο Poisson, αν αντίθετος στη κυματική φύση του φωτός, παρατήρησε τη φωτεινή κηλίδα στην σκιά ενός κυκλικού εμποδίου (Poisson's spot) που απέρριψε τη σωματιδιακή θεωρία. Με τη θεωρία του Maxwell το 1860, ο Kirchoff το 1882 έθεσε το μαθηματικό φορμαλισμό της περίθλασης. Αν και οι βασικές του υποθέσεις αποδειχθήκαν inconsistent από τον Poincare το 1892 και τον Sommerfeld το 1894, η θεώρηση Kirchoff-Fresnel είναι πολύ καλή. Ο Sommerfeld έβαλε τη θεώρηση σε καλύτερη βάση, με τη θεωρία Rayleigh-Sommerfeld.

Η βασική προσέγγιση στη περίθλαση είναι ότι το φως θεωρείται σαν μια βαθμωτή ποσότητα, αγνοώντας την ανυσματική φύση των εξισώσεων Maxwell. Έτσι αγνοείται και η ζεύξη του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου μέσα από τις σχέσεις Maxwell κοντά σε ασυνέχειες και σύνορα. Η προσέγγιση θεωρείται ανεκτή αν (1) το άνοιγμα της οπής περίθλασης είναι μεγάλο σε σχέση με το μήκος κύματος και (2) τα πεδία περίθλασης παρατηρούνται αρκετά μακριά από το άνοιγμα αυτό.

Από το φαινόμενο της συμβολής, που βασίζεται στην υπέρθεση με δύο ή περισσότερα πεδία το κάθε ένα με το δικό του πλάτος ταλάντωσης και φάση και τα οποία συμβάλουν σε κάποια θέση στο χώρο, περνάμε στο φαινόμενο της περίθλασης, όταν η συμβολή γενικεύεται και πρέπει να βρούμε τη συνεισφορά από πολλές (άπειρες) αλλά απειροελάχιστες σε πλάτος συνιστώσες πεδίων.

Φαινόμενα περίθλασης σε κάποιο οπτικό σύστημα υπάρχουν πάντοτε, ακόμα και όταν αυτό δεν παρουσιάζει εκτροπές και το υλικό μέσα από το οποίο η ακτινοβολία διαδίδεται δεν επιβάλλει καμιά διαταραχή στο σύστημα. Αν και στη περίπτωση αυτή τα είδωλα μπορεί να είναι τέλεια, παρατηρούμε ότι τα είδωλα από σημειακά αντικείμενα δεν θα είναι απόλυτα σημεία. Ο λόγος είναι ότι η κυματική φύση του φωτός και η αλληλεπίδραση του με τα οπτικά και τα αντικείμενα στο οπτικό σύστημα, θα εισάγει το φαινόμενο της περίθλασης. Η περίθλαση είναι το μόνο φαινόμενο που μπορεί να κάνει ένα είδωλο ασαφές από κυματικά μέτωπα χωρίς ατέλειες (από σύμφωνο φως).

Αν και μπορούμε να δοκιμάσουμε για μια αναλυτική περιγραφή της περίθλασης μέσα από τη κυματική εξίσωση του η/μ πεδίου, τα πιο πολλά φαινόμενα περίθλασης μπορούν να περιγραφούν με βάση την αρχή του Huygens. Η αρχή του Huygens είναι μια από τις πιο παλιές αρχές της μοντέρνας φυσικής και λίγες από το τέλος του 17^{ου} αιώνα που ισχύουν ακόμα. Είναι σχετισμένη με πολλές παρατηρήσεις σχετικά με τη διάδοση του φωτός, αν και αρχικά είχε διατυπωθεί για την εξήγηση του φαινομένου της περίθλασης. Είναι στενά συνδεδεμένη με τη μοντέρνα περιγραφή της διάδοσης του φωτός μέσα από υλικά, που βασίζεται στην επανεκπομπή της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Η αρχή του Huygens δεν μπορεί να μας δώσει το ποσοστό ανάκλασης και διάδοσης. Απλώς μας λέει ότι η ενέργεια του κύματος διατηρείται και μοιράζεται στις τρεις πιθανές συνιστώσες της ανάκλασης, διάδοσης και απορρόφησης.

Περιγραφικά, η αρχή του Huygens θέλει κάθε τμήμα του οπτικού μετώπου στο χώρο να είναι μια πηγή ενός δευτερογενούς σφαιρικού κύματος. Είναι μια γεωμετρική συνταγή για να βρούμε το δρόμο ενός κύματος, όπου το μήκος κύματος είναι μικρό. Η αρχή είναι inductive. Τα βήματα είναι τα εξής:

- (α) ξεκινάμε με την κυματομορφή σε κάποια χρονική στιγμή
- (β) κάθε σημείο της θεωρείται πηγή για την επόμενη διαταραχή
- (γ) κατασκευάζουμε ένα κύκλο με κέντρο τα σημεία αυτά, και ο οποίος αντιπροσωπεύει τη πιθανή διάδοση της διαταραχής προς όλες τις διευθύνσεις για κάποιο μικρό χρονικό διάστημα αργότερα.
- (δ) όπου οι κύκλοι επικαλύπτονται, οι πιθανές διαταραχές μηδενίζονται

(ε) η κοινή εφαπτομένη των κύκλων ορίζει μια νέα κυματομορφή, έπειτα από την μικρή αυτή χρονική περίοδο.

(ζ) με τη νέα κυματομορφή ξεκινάμε από το βήμα (β) κ.ο.κ.

Το τελικό σημείο παρατήρησης μπορεί να είναι κοντά στο σημείο της πηγής, στη περίπτωση περίθλασης κοντινού πεδίου (*near field*), ή μακριά, για του μακρινού πεδίου (*far field*).

Βαθμωτή θεωρία περίθλασης

Οι σχέσεις Maxwell σε μέσα χωρίς φορτία και ρεύματα στο σύστημα MKS δίνονται από

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\mu \partial_t \mathbf{h} \quad \nabla \times \mathbf{h} = \epsilon \partial_t \mathbf{e}$$

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{e} = 0 \quad \nabla \cdot \mu \mathbf{h} = 0$$

Στην περίθλαση, το φως διαδίδεται μέσα από διηλεκτρικά υλικά. Ισοτροπικά υλικά επίσης έχουν οπτικές ιδιότητες ανεξάρτητες της θέσης στο χώρο, και ομογενή μέσα έχουν οπτικές ιδιότητες σταθερές σε όλο το χώρο. Μέσα χωρίς διασπορά έχουν τη διηλεκτρική σταθερά ανεξάρτητη του μήκους κύματος και για μη-μαγνητικά υλικά $\mu = \mu_0$.

Η κυματική εξίσωση που προκύπτει από τις παραπάνω υποθέσεις είναι για το ηλεκτρικό πεδίο

$$\nabla^2 \mathbf{e} - (n/c)^2 \partial_t^2 \mathbf{e} = 0$$

με $n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$ και $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, και για το μαγνητικό πεδίο

$$\nabla^2 \mathbf{h} - (n/c)^2 \partial_t^2 \mathbf{h} = 0$$

Έχουμε έτσι βαθμωτές κυματικές εξισώσεις για ισοτροπικά, ομογενή, γραμμικά διηλεκτρικά μέσα για κάθε συνιστώσα του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου. Γράφουμε για τη βαθμωτή εξίσωση που περιγράφει το η/μ κύμα για ένα τέτοιο μέσο

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}, t) - \frac{n^2}{c^2} \partial_t^2 u(\mathbf{x}, t) = 0$$

όπου $u(\mathbf{x}, t)$ είναι μια οποιαδήποτε συνιστώσα του πεδίου \mathbf{e} ή \mathbf{h} .

Η βαθμωτή αυτή κυματική εξίσωση για ανομοιογενή μέσα, όπου η επιτρεπτότητα του υλικού εξαρτάται από τη θέση στο χώρο, δεν θα ισχύει και θα πρέπει να θεωρήσουμε την ανυσματική μορφή των πεδίων.

Αν για παράδειγμα, η επιτρεπτότητα είναι της μορφής $\epsilon = \epsilon(\mathbf{x})$, τότε η κυματική εξίσωση θα πάρει τη μορφή

$$\nabla^2 \mathbf{e} + 2\nabla(\mathbf{e} \cdot \nabla \ln n) - (n/c)^2 \partial_t^2 \mathbf{e} = 0$$

Πιο σημαντικό είναι η ζεύξη των συνιστωσών του πεδίου μέσα από το δεύτερο όρο. Η ζεύξη μεταξύ των διαφορετικών συνιστωσών των πεδίων δεν υπάρχει στη βαθμωτή διαφορική εξίσωση. Μια τέτοια ζεύξη όμως παρατηρείται και σε ομογενή υλικά όταν επιβάλλονται συνοριακές συνθήκες στη διάδοση του κύματος. Στα άκρα του υλικού, έχουμε μια ζεύξη των συνιστωσών των \mathbf{e} και \mathbf{h} , καθώς επίσης και μεταξύ τους. Η ζεύξη αυτή μπορεί να θεωρηθεί μικρή όταν οι συνοριακές συνθήκες επιβάλλονται για μια περιοχή μικρή σε σχέση με τη περιοχή που καλύπτεται από το η/μ κύμα. Στη περίπτωση της περίθλασης μια τέτοια ζεύξη συμβαίνει στα όρια της οπής, και είναι σημαντική για μερικά μήκη κύματος μακριά από τη περίμετρο του διαφράγματος. Εάν η οπή έχει διαστάσεις πολύ μεγαλύτερες του μήκους κύματος της ακτινοβολίας, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το σφάλμα αυτό μικρό.

Περιορίζουμε τη προσοχή μας στη βαθμωτή θεώρηση, και περιγράφουμε το φως σαν μια συνάρτηση $u(\mathbf{x}, t)$, η οποία για μονοχρωματικό φως έχει τη μορφή

$$u(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}) \cos(2\pi \nu t + \phi(\mathbf{x}))$$

με $A(\mathbf{x})$ και $\phi(\mathbf{x})$ τυχαίο πλάτος και φάση του κύματος και ν την οπτική συχνότητα. Μπορούμε να γράψουμε τη παραπάνω στην εκθετική μιγαδική της μορφή

$$u(\mathbf{x}, t) = \text{Re}\{U(\mathbf{x})e^{-2\pi i \nu t}\}$$

όπου $U(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})e^{-i\phi(\mathbf{x})}$. Αντικαθιστώντας στη κυματική εξίσωση το μονοχρωματικό κύμα παίρνουμε

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{x}) = 0 \text{ συνάρτηση Helmholtz}$$

με $k = 2\pi\nu/c = 2\pi/\lambda$, το κυματάριθμο του κύματος. Για να βρούμε τη συνάρτηση $U(\mathbf{x})$ χρησιμοποιούμε το θεώρημα Green.

Για δύο μιγαδικές συναρτήσεις $U(\mathbf{x})$ και $G(\mathbf{x})$ στο χώρο, και για μια κλειστή επιφάνεια S που περιβάλλει ένα όγκο V , με τις συναρτήσεις $U(\mathbf{x})$ και $G(\mathbf{x})$ να έχουν πρώτη και δεύτερη παράγωγο συνεχή μέσα σε αυτόν, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \iiint_V (U(\mathbf{x})\nabla^2 G(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x})\nabla^2 U(\mathbf{x}))dV \\ = \iint_S (U(\mathbf{x})\partial_n G(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x})\partial_n U(\mathbf{x}))dS \end{aligned}$$

με $\partial_n \triangleq \partial/\partial n$ τη μερική παράγωγο στη κατεύθυνση της προς τα έξω καθέτου στην επιφάνεια S .

Το θεώρημα αποτελεί την βασική σχέση για τη βαθμωτή θεωρία της περίθλασης. Για να βρούμε τη λύση της $U(\mathbf{x})$ χρειάζεται μια σωστή επιλογή της $G(\mathbf{x})$ και μια κατάλληλη επιφάνεια S .

Θεώρημα ολοκληρώματος Kirchhoff-Helmholtz

Για κάποια κλειστή επιφάνεια S , όπως στο σχήμα που περικλείει το σημείο παρατήρησης \mathbf{x}' , το πρόβλημα είναι να βρούμε τη συνάρτηση της οπτικής διαταραχής στο \mathbf{x}' σε σχέση με τις τιμές της στην επιφάνεια S . Με τη μέθοδο του Kirchhoff για την εφαρμογή του θεωρήματος Green, επιλέγουμε τη βοηθητική συνάρτηση σαν ένα μοναδιαίου πλάτους σφαιρικό κύμα που απλώνεται από το σημείο \mathbf{x} (η συνάρτηση Green για τον ελεύθερο χώρο) άρα στο σημείο \mathbf{x}

$$G(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr'}}{r'}$$

όπου r' είναι το μήκος του ανύσματος \mathbf{r}' που συνδέει τα σημεία μεταξύ της πηγής και παρατήρησης.

Σημειώνουμε μερικές σημαντικές ιδιότητες της συνάρτησης Green. Για κάποια ανομοιογενή διαφορική εξίσωση του είδους

$$a_2(\mathbf{x})\frac{d^2U(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^2} + a_1(\mathbf{x})\frac{dU(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} + a_0(\mathbf{x})U(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x})$$

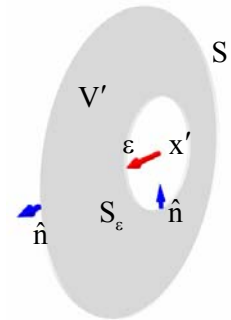
με $V(\mathbf{x})$ τη διέγερση του συστήματος και $U(\mathbf{x})$ να ικανοποιεί κάποιες συνοριακές συνθήκες. Μπορούμε να δείξουμε ότι αν η $G(\mathbf{x})$ είναι μια λύση της παραπάνω διαφορικής όταν η $V(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ και με τις ίδιες συνοριακές συνθήκες, τότε η $U(\mathbf{x})$ δίνεται από

$$U(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')V(\mathbf{x}')d^3x'$$

όπου η $G(\mathbf{x})$ είναι η συνάρτηση Green του προβλήματος και αποτελεί την απόκριση του συστήματος σε impulses.

Στη περίπτωση μας, η συνάρτηση Green καθώς επίσης και η πρώτη και δεύτερη παράγωγος, πρέπει να είναι συνεχής μέσα στο όγκο V . Για να αποκλείσουμε έτσι την ασυνέχεια στο σημείο \mathbf{x}' , έχουμε πάρει ένα μικρό όγκο με επιφάνεια S_ϵ και ακτίνα ϵ γύρω από το σημείο \mathbf{x}' , το οποίο και αποκλείουμε. Έτσι για το θεώρημα του Green, ο όγκος ολοκλήρωσης είναι μέσα στις δύο επιφάνειες και η επιφάνεια ολοκλήρωσης περιλαμβάνει και τις δύο ώστε $S' = S + S_\epsilon$. Τα μοναδιαία κάθετα ανύσματα στις επιφάνειες έχουν κατεύθυνση προς την εξωτερική πλευρά του όγκου.

Μέσα στον όγκο V' , η συνάρτηση G ικανοποιεί τη σχέση Helmholtz



$$(\nabla^2 + k^2)G = 0$$

και το θεώρημα του Green μας δίνει

$$\iiint_{V'} (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) dV' = \iiint_{V'} -(U k^2 G - G k^2 U) dV' = 0$$

και μένει το ολοκλήρωμα της επιφάνειας

$$\iint_{S'} (U \partial_n G - G \partial_n U) dS = 0$$

$$\Rightarrow -\iint_{S_\epsilon} (U \partial_n G - G \partial_n U) dS = \iint_S (U \partial_n G - G \partial_n U) dS$$

Σε κάποιο σημείο \mathbf{x} της επιφάνειας S' έχουμε $G(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr'}}{r'}$, τότε

$$\partial_n G(\mathbf{x}) = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') \left(ik - \frac{1}{r'} \right) \frac{e^{ikr'}}{r'}$$

όπου $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}')$ είναι το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των ανυσμάτων \mathbf{n} της καθέτου της επιφάνειας και του \mathbf{r}' μεταξύ των σημείων \mathbf{x} και \mathbf{x}' . Αν πάρουμε το σημείο \mathbf{x} στην επιφάνεια S_ϵ , τότε $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') = -1$ και έχουμε

$$G(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \text{ και } \partial_n G(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \left(\frac{1}{\epsilon} - ik \right)$$

Αν επιτρέψουμε το $\epsilon \rightarrow 0$, η συνέχεια της U και των παραγώγων της μας επιτρέπει να γράψουμε

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\epsilon} (U \partial_n G - G \partial_n U) dS &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi\epsilon^2 \left[U(\mathbf{x}') \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \left(\frac{1}{\epsilon} - ik \right) - \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \partial_n U(\mathbf{x}') \right] \\ &= 4\pi U(\mathbf{x}') \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση των δύο ολοκληρωμάτων επιφάνειας, παίρνουμε

$$U(\mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\left(\frac{e^{ikr'}}{r'} \right) \partial_n U - U \partial_n \left(\frac{e^{ikr'}}{r'} \right) \right] dS$$

γνωστή σαν θεώρημα ολοκληρώματος του Helmholtz (**Helmholtz-Kirchhoff integral theorem**) που μας δίνει το πεδίο σε κάποιο σημείο \mathbf{x}' σαν συνάρτηση των συνοριακών τιμών του πεδίου στην επιφάνεια που περικλείει το σημείο αυτό.

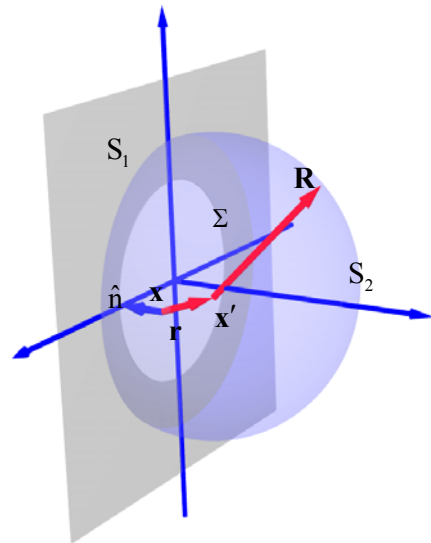
Περίθλαση από επίπεδη οπή

Για μια οπή σε μια άπειρη αδιαφανή επιφάνεια, όπως στο σχήμα, η αρχική διαταραχή προσπίπτει από τα αριστερά και θέλουμε να βρούμε το πεδίο στο σημείο \mathbf{x}' πίσω από το διάφραγμα.

Πρέπει να επιλέξουμε τις επιφάνειες ολοκλήρωσης σωστά. Η κλειστή επιφάνεια αποτελείται από δύο τμήματα, την S_1 που ακολουθεί το προφίλ της αδιαφανής επιφάνειας του διαφράγματος και μιας σφαιρικής S_2 ακτίνας R με κέντρο το \mathbf{x}' . Η κλειστή επιφάνεια ολοκλήρωσης είναι η ένωση των δύο, ώστε

$$U(\mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\partial_n U \left(\frac{e^{ikr'}}{r'} \right) - U \partial_n \left(\frac{e^{ikr'}}{r'} \right) \right] dS$$

Όπως το R αυξάνει, η S_2 πλησιάζει τη μορφή ενός ημισφαιρικού κελύφους. Εφόσον η G και η U μειώνονται σαν



$1/R$, το ολοκλήρωμα θα τείνει στο μηδέν και θα συνεισφέρει μηδενική τιμή στο ολοκλήρωμα από την επιφάνεια S_2 . Η επιφάνεια ολοκλήρωσης όμως αυξάνει σαν R^2 , ώστε η παραπάνω προσέγγιση είναι ημιτελής. Μπορούμε επίσης να πούμε ότι εφόσον η διαταραχή διαδίδεται με ταχύτητα c/n , το R είναι τόσο μεγάλο ώστε τα κύματα δεν έχουν φτάσει στην επιφάνεια S_2 και έτσι το ολοκλήρωμα αναμένεται μηδενικό στην επιφάνεια αυτή. Το πρόβλημα όμως είναι ότι έχουμε υποθέσει μονοχρωματικό κύμα, ώστε αυτή πρέπει να υπάρχει για όλο το χρόνο και άρα βρίσκεται και στην επιφάνεια S_2 . Χρειαζόμαστε μια πρόσθετη αιτιολόγηση για να αγνοήσουμε τη συνεισφορά της επιφάνειας S_2 .

Βλέπουμε ότι στην επιφάνεια S_2 η συνάρτηση Green είναι

$$G(R) = \frac{e^{ikR}}{R} \text{ και } \partial_n G(R) = \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{R} \approx ikG$$

που ισχύει όταν $R \rightarrow \infty$. Έτσι έχουμε

$$\iint_{S_2} [G \partial_n U - U (ikG)] dS = \iint_{\Omega} G (\partial_n U - ikU) R^2 d\Omega$$

με Ω τη στερεά γωνία του σημείου x_0 στην επιφάνεια S_2 . Η ποσότητα $|RG|$ είναι ομοίμορφα περιορισμένη από την επιφάνεια S_2 . Το όλο ολοκλήρωμα στην S_2 θα μηδενισθεί όπως το $R \rightarrow \infty$ αν η διαταραχή υπακούει στο περιορισμό

$$\lim_{R \rightarrow \infty} [R (\partial_n U - ikU)] = 0$$

Η συνθήκη αυτή είναι γνωστή σαν συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld (**Sommerfeld radiation condition**) και ισχύει αν η U μειώνεται τουλάχιστον όσο γρήγορα όσο ένα σφαιρικό κύμα. Έτσι για κύματα που διαδίδονται προς τα έξω, το ολοκλήρωμα της S_2 θα έχει μηδενική συνεισφορά.

Απομένει η συνεισφορά της S_1

$$U(x') = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} [G \partial_n U - U \partial_n G] dS$$

Αν η επιφάνεια είναι αδιαφανής, εκτός από τη περιοχή της οπής Σ , περιμένουμε τις σημαντικές συνεισφορές από το μέρος αυτό μόνο της άπειρης επιφάνειας S_1 .

Οι υποθέσεις του Kirchhoff είναι οι εξής:

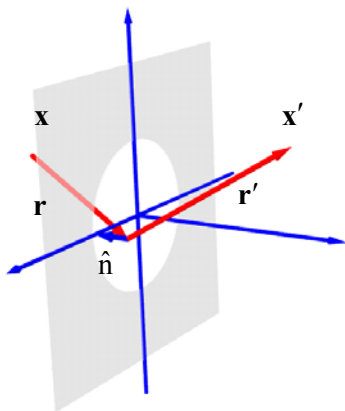
- (α) στην επιφάνεια Σ , η κατανομή της U και της παράγωγος της $\partial U / \partial t$ θα είναι αυτή όπως αν δεν υπήρχε η αδιαφανής επιφάνεια.
- (β) για το μέρος της S_1 που βρίσκεται στην γεωμετρική σκιά του διαφράγματος, η κατανομή της U και της παράγωγος της $\partial U / \partial t$ θα είναι μηδέν.

γνωστές και σαν συνοριακές συνθήκες Kirchhoff.

Η πρώτη μας επιτρέπει τον ορισμό της U στο διάφραγμα Σ ανεξάρτητα της αδιαφανούς περιοχής, και η δεύτερη μας επιτρέπει να αγνοήσουμε όλη την επιφάνεια εκτός από τις συνεισφορές της Σ . Έτσι

$$U(x') = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} [G \partial_n U - U \partial_n G] dS$$

Πρέπει να πούμε ότι οι παραπάνω υποθέσεις δεν είναι απόλυτα αποδεκτές. Η παρουσία της οπής θα διαταράξει τα πεδία στην επιφάνεια Σ , εφόσον κοντά στη περίμετρο της οπής θα ισχύουν μερικές συνοριακές συνθήκες που δεν υφίστανται με την απουσία της οπής. Επίσης η σκιά πίσω από το διάφραγμα δεν είναι τέλεια, εφόσον πεδία μπορούν να υπάρξουν για αρκετά μήκη κύματος και να συνεισφέρουν. Για διαστάσεις της οπής πολύ μεγαλύτερες του μήκους κύματος, μπορούμε να πούμε ότι οι δύο υποθέσεις θα ικανοποιούνται αρκετά



καλά.

Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι το σημείο παρατήρησης \mathbf{x}' είναι αρκετά απομακρυσμένο (πολλά μήκη κύματος) από το διάφραγμα, ώστε να ισχύει $k \gg 1/r'$, οπότε έχουμε

$$\partial_n G(\tilde{\mathbf{x}}) = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') \left(ik - \frac{1}{r'} \right) \frac{e^{ikr'}}{r'} \approx ik \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') \frac{e^{ikr'}}{r'}$$

και για το πεδίο $U(\mathbf{x}')$ παίρνουμε

$$U(\mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ikr'}}{r'} [\partial_n U - ikU \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}')] dS$$

Αν η οπή φωτίζεται από ένα μονοχρωματικό σφαιρικό κύμα, όπως στο σχήμα, τότε

$$U(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{e^{ikr}}{r}$$

για μια σημειακή πηγή στο σημείο \mathbf{x} σε απόσταση r από το $\tilde{\mathbf{x}}$. Όταν το \mathbf{r} είναι σε απόσταση πολλά μήκη κύματος από το διάφραγμα, μπορούμε να πούμε ότι

$$\partial_n U(\tilde{\mathbf{x}}) = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \approx ik \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \frac{e^{ikr}}{r}$$

και καταλήγουμε στη σχέση

$$U(\mathbf{x}') = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ik(r+r')}}{r r'} \left[\frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})}{2} \right] dS$$

γνωστή σαν σχέση περίθλασης Kirchhoff-Fresnel, η οποία ισχύει για σημειακές μονοχρωματικές πηγές.

Η παραπάνω σχέση είναι συμμετρική σε σχέση με το σημείο πηγής \mathbf{x} και παρατήρησης \mathbf{x}' . Έτσι μια σημειακή πηγή στο \mathbf{x}' θα δημιουργήσει την ίδια κυματομορφή στο \mathbf{x} , και αυτό είναι γνωστό σαν το θεώρημα reciprocity Helmholtz.

Τη παραπάνω σχέση μπορούμε να τη γράψουμε και σαν

$$U(\mathbf{x}') = \iint_{\Sigma} \tilde{U}(\tilde{\mathbf{x}}) \frac{e^{ikr'}}{r'} dS$$

με

$$\tilde{U}(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{i\lambda} \frac{Ae^{ikr}}{r} \left[\frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})}{2} \right]$$

μια μορφή που μας δίνει το πεδίο στο σημείο \mathbf{x}' σαν την κατάληξη μιας φανταστικής πηγής άπειρων σημείων πάνω στην οπή του διαφράγματος. Τα σημεία αυτά έχουν ορισμένα πλάτη και φάσεις $U(\tilde{\mathbf{x}})$.

Η παραπάνω θεώρηση βασίζεται στο φωτισμό της οπής με σημειακή πηγή. Ο περιορισμός αυτός μπορεί να αρθεί από την θεώρηση του Rayleigh-Sommerfeld

Rayleigh-Sommerfeld περίθλαση

Η θεωρία του Kirchhoff δίνει πολύ καλά αποτελέσματα και χρησιμοποιείται ευρέως. Περιέχει όμως και μερικές αντιθέσεις. Οι δυσκολίες πηγάζουν από τις συνοριακές συνθήκες που χρειάζονται για το πλάτος του πεδίου και τις παραγώγους του στη κάθετη κατεύθυνση. Είναι γνωστό από τη θεωρία των δυναμικών, ότι αν ένα δισδιάστατο δυναμικό και η κάθετος παράγωγος του μηδενίζονται ταυτόχρονα σε κάποια πεπερασμένη περιοχή μιας επιφάνειας, τότε η συνάρτηση του δυναμικού μηδενίζεται σε όλη την επιφάνεια. Έτσι αν η λύση της τρισδιάστατης κυματικής εξίσωσης μηδενίζεται σε κάποια επιφάνεια, τότε θα μηδενίζεται σε όλο το χώρο. Οι υποθέσεις του Kirchhoff μηδενίζουν το πεδίο παντού.

Η θεώρηση του Sommerfeld αφαίρεσε τα προβλήματα από τις συνοριακές αυτές συνθήκες.

Αν πάρουμε πάλι τη σχέση για το πεδίο σε κάποιο σημείο παρατήρησης

$$U(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} [G\partial_n U - U\partial_n G] dS$$

με συνθήκες

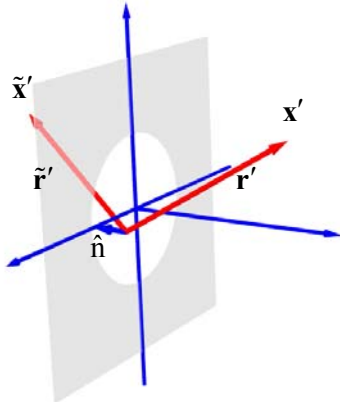
(α) η βαθμωτή προσέγγιση ισχύει

(β) οι συναρτήσεις U και G ικανοποιούν τη βαθμωτή ομογενή κυματική εξίσωση

(γ) η συνθήκη ακτινοβολίας Rayleigh-Sommerfeld ισχύει

Αν η G αλλάξει ώστε να μπορούμε να καταλήξουμε στη παραπάνω σχέση και αν η G ή η $\partial_n G$ μηδενίζονται στην επιφάνεια S_1 , τότε η ανάγκη να επιβάλουμε συνοριακές συνθήκες στις U και $\partial_n U$ δεν θα υπάρχει και τα προβλήματα της θεωρίας Kirchhoff θα ήταν λυμένα.

Ο Sommerfeld έδειξε ότι τέτοιες συναρτήσεις G υπάρχουν. Υπέθεσε ότι η G σχηματίζεται όχι μόνο από το \mathbf{x}' αλλά και από ένα άλλο σημείο $\tilde{\mathbf{x}}$ το κατοπτρικό είδωλο του \mathbf{x}' ως προς την επιφάνεια του διαφράγματος, όπως στο σχήμα. Το μήκος κύματος είναι το ίδιο και για τα δύο σημεία, αλλά η φάση τους μπορεί να ταλαντώνεται σε και εκτός φάσης μεταξύ τους. Όταν πάρουμε τη ταλάντωση εκτός φάσης 180° , τότε



$$G_-(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{e^{ikr'}}{r'} - \frac{e^{ik\tilde{r}'}}{\tilde{r}'}$$

Η συνάρτηση αυτή μηδενίζεται στο επίπεδο της οπής Σ , που μας δίνει για το πεδίο παρατήρησης

$$U_I(\mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} U \partial_n G_- dS$$

μια λύση γνωστή σαν πρώτη λύση του Rayleigh-Sommerfeld. Για την απόσταση \tilde{r}' μεταξύ των σημείων $\tilde{\mathbf{x}}$ και $\tilde{\mathbf{x}}'$ η κάθετη παράγωγος της G_- είναι

$$\partial_n G_-(\tilde{\mathbf{x}}) = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') \left(ik - \frac{1}{r'} \right) \frac{e^{ikr'}}{r'} - \cos(\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{r}}') \left(ik - \frac{1}{\tilde{r}'} \right) \frac{e^{ik\tilde{r}'}}{\tilde{r}'}$$

Εφόσον στο επίπεδο της οπής, έχουμε

$$r' = \tilde{r}' \text{ και } \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') = -\cos(\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{r}}')$$

τότε

$$\partial_n G_-(\tilde{\mathbf{x}}) = 2 \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') \left(ik - \frac{1}{r'} \right) \frac{e^{ikr'}}{r'}$$

Αν $r' \gg \lambda$, αγνοούμε τον δεύτερο όρο στη παραπάνω σχέση και έχουμε

$$\partial_n G_-(\tilde{\mathbf{x}}) = 2 \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') ik \frac{e^{ikr'}}{r'}$$

που είναι δυο φορές η κάθετη παράγωγος του Kirchhoff, δηλαδή

$$\partial_n G_-(\tilde{\mathbf{x}}) = 2 \partial_n G(\tilde{\mathbf{x}})$$

και γράφουμε

$$U_I(\mathbf{x}') = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} U \partial_n G dS$$

Μια άλλη εναλλακτική λύση μπορεί να είναι αυτή που οι δύο πηγές είναι σε φάση, ώστε

$$\partial_n G_+(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{e^{ikr'}}{r'} + \frac{e^{ik\tilde{r}'}}{\tilde{r}'}$$

Στη περίπτωση αυτή, η κάθετη παράγωγος μηδενίζεται στη οπή του διαφράγματος Σ , που μας δίνει τη δεύτερη λύση του Rayleigh-Sommerfeld

$$U_{II}(\mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} G_+ \partial_n U dS$$

Για την επιφάνεια Σ και με την υπόθεση ότι $r' \gg \lambda$, η G_+ είναι δύο φορές η συνάρτηση Helmholtz G

$$G_+ = 2G$$

που μας δίνει

$$U_{II}(\mathbf{x}') = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} G \partial_n U dS$$

Χρησιμοποιώντας την

$$\partial_n G_-(\tilde{\mathbf{x}}) = 2 \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') ik \frac{e^{ikr'}}{r'}$$

τότε

$$U_I(\mathbf{x}') = \frac{1}{i\lambda} \iint_{S_1} U(\tilde{\mathbf{x}}) \frac{e^{ikr'}}{r'} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') dS$$

και με τις συνοριακές συνθήκες του Kirchhoff μόνο στη U έχουμε

$$U_I(\mathbf{x}') = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(\tilde{\mathbf{x}}) \frac{e^{ikr'}}{r'} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') dS$$

και χωρίς τις συνοριακές συνθήκες για την $\partial U / \partial n$, δεν έχουμε το πρόβλημα δυναμικών που μηδενίζονται.

Με την άλλη συνάρτηση του Green

$$U_{II}(\mathbf{x}') = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ikr'}}{r'} \partial_n U(\tilde{\mathbf{x}}) dS$$

χωρίς συνοριακές συνθήκες για την U .

Από τις σχέσεις των $U_I(\mathbf{x}')$ και $U_{II}(\mathbf{x}')$, που φωτίζονται από ένα αποκλίνων σφαιρικό κύμα όπως και για τη περίπτωση του Kirchhoff, έχουμε

$$U(\tilde{\mathbf{x}}) = A \frac{e^{ikr}}{r}$$

ώστε με τη πρώτη περίπτωση

$$U_I(\mathbf{x}') = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ik(r+r')}}{r r'} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') dS$$

μια σχέση γνωστή σαν περίθλαση Rayleigh-Sommerfeld, και για τη δεύτερη

$$U_{II}(\mathbf{x}') = \frac{-A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ik(r+r')}}{r r'} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') dS$$

και η γωνία μεταξύ \mathbf{n} και \mathbf{r} είναι μεγαλύτερη 90° .

Από τις παραπάνω σχέσεις συνοψίζουμε ότι

$$U(\mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} (G_K \partial_n U + U \partial_n G_K) dS$$

$$U_I(\mathbf{x}') = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} (U \partial_n G_K) dS$$

$$U_{II}(\mathbf{x}') = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} (G_K \partial_n U) dS$$

με G_K τη συνάρτηση Green για την περίπτωση Kirchhoff, που μας δείχνει ότι η περίπτωση Kirchhoff είναι ο αριθμητικός μέσος όρος των δύο λύσεων του Rayleigh-Sommerfeld.

Για την περίπτωση που έχουμε σφαιρικό κύμα για τη πηγή μας, η διαφορά βρίσκεται στο παράγοντα obliquity ψ , και γράφουμε γενικά

$$U(\mathbf{x}') = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ik(r+r')}}{r r'} \psi dS$$

με

$$\psi = \begin{cases} \frac{1}{2} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})] & \text{Kirchhoff} \\ \cos \theta & \text{first solution Rayleigh} \\ 1 & \text{second solution Rayleigh} \end{cases}$$

όταν η πηγή βρίσκεται αρκετά μακριά (στο άπειρο), τότε έχουμε ένα επίπεδο κύμα πρόσπτωσης τότε

$$\psi = \begin{cases} \frac{1}{2} [1 + \cos \theta] & \text{Kirchhoff} \\ \cos \theta & \text{first solution Rayleigh} \\ 1 & \text{second solution Rayleigh} \end{cases}$$

για μια γωνία θ μεταξύ \mathbf{n} και \mathbf{r}' .

Με μια σύγκριση των λύσεων, βλέπουμε ότι για σημεία παρατήρησης μακριά από το επίπεδο του διαφράγματος (το μακρινό πεδίο) οι τρεις λύσεις είναι ίδιες. Για μήκη κύματος πολύ μικρότερα από το μέγεθος της οπής, οι λύσεις είναι πάλι οι ίδιες. Διαφορές έχουμε για αποστάσεις κοντά στο διάφραγμα.

Όταν έχουμε μικρές γωνίες παρατήρησης, οι λύσεις έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, όπου ο παράγοντας obliquity τείνει στη μονάδα.

Η θεώρηση Kirchhoff μπορεί να θεωρηθεί πιο γενική, εφόσον επιτρέπει διαφράγματα που δεν είναι επίπεδα, ενώ αυτή του Rayleigh-Sommerfeld επιβάλλει επίπεδα διαφράγματα με τη κατασκευή του σημείου $\tilde{\mathbf{x}}'$.

Εστιάζοντας στη πρώτη λύση Rayleigh-Sommerfeld, βλέπουμε ότι

$$U(\mathbf{x}') = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(\tilde{\mathbf{x}}) \frac{e^{ikr'}}{r'} \cos \theta dS$$

με την αρχή του Fresnel-Huygens, όπου η γωνία θ σχηματίζεται μεταξύ των \mathbf{n} και \mathbf{r}' .

Η σχέση αυτή παρουσιάζει το πεδίο παρατήρησης σαν υπέρθεση από αποκλίνοντα σφαιρικά κύματα $\frac{e^{ikr'}}{r'}$, που πηγάζουν από τις δευτερεύουσες πηγές από κάθε σημείο $\tilde{\mathbf{x}}$ της επιφάνειας Σ . Η δευτερεύουσα

πηγή έχει τις παρακάτω ιδιότητες

(α) έχει ένα μιγαδικό πλάτος ανάλογο του πλάτους διέγερσης $U(\tilde{\mathbf{x}})$

(β) έχει πλάτος αντιστρόφως ανάλογο του μήκους κύματος λ , ή ανάλογο της συχνότητας.

(γ) έχει φάση που προηγείται κατά 90° του αρχικού κύματος με τον παράγοντα $1/i$.

(δ) κάθε δευτερεύουσα πηγή έχει ένα παράγοντα κατεύθυνσης $\cos \theta$.

Η πρώτη παρατήρηση βασίζεται στο γεγονός ότι η κυματική διάδοση είναι ένα γραμμικό φαινόμενο, ώστε το κύμα που παρατηρούμε πρέπει να είναι ανάλογο του αρχικού.

Η κυματική κίνηση από την οπή έως το σημείο παρατήρησης γίνεται λόγω των αλλαγών του πεδίου στην οπή. Θα δούμε παρακάτω ότι το πεδίο στο σημείο \mathbf{x}' που πηγάζει από το σημείο \mathbf{x} εξαρτάται από το ρυθμό αλλαγής του πεδίου στο $\tilde{\mathbf{x}}$. Για το μονοχρωματικό κύμα, μια διαταραχή με δεξιόστροφο φασικό άνυσμα $e^{-2i\pi\nu t}$, η παράγωγος της θα είναι ανάλογη της συχνότητας και του $-i$.

Για την τελευταία ιδιότητα, η φυσική της εξήγηση είναι πιο περίπλοκη. Πουθενά στο επίπεδο της οπής δεν υπάρχει κάποιο μέσο και πηγές η/μ κυμάτων. Όλες οι πιθανές πηγές βρίσκονται στη περίμετρο της οπής. Βλέπουμε έτσι ότι η αρχή του Fresnel-Huygens μας επιτρέπει με μια απλή μαθηματική κατασκευή να λύσουμε το πρόβλημα της περιθλασης χωρίς να ασχοληθούμε με τις λεπτομέρειες της περιμέτρου της οπής. Η αρχή αυτή βασίζεται σε ένα ολοκλήρωμα υπέρθεσης, ώστε να μπορούμε να γράψουμε τις παραπάνω σχέσεις σαν

$$U(\mathbf{x}') = \iint_{\Sigma} h(\mathbf{x}', \tilde{\mathbf{x}}) U(\tilde{\mathbf{x}}) dS$$

με $h(\mathbf{x}', \tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikr'}}{r'}$ $\cos\theta$. Το ολοκλήρωμα αυτό είναι αποτέλεσμα της αρχικής υπόθεσης μιας γραμμικής απόκρισης του συστήματος. Αν μελετήσουμε παραπέρα το χαρακτήρα του $h(\mathbf{x}', \tilde{\mathbf{x}})$ θα το βρούμε επίσης χωρικά αμετάβλητο (*spatially invariant*), λόγω της ομοιογένειας που υποθέσαμε για το διηλεκτρικό μέσο. Στη περίπτωση αυτή η αρχή του Fresnel-Huygens θα έχει τη μορφή μια συνέλιξης.

Πολυχρωματικές πηγές

Για κάποια βαθμωτή διαταραχή $u(\mathbf{x}', t)$ που παρατηρούμε στα δεξιά μιας οπής Σ σε μια αδιαφανή επιφάνεια στην οποία προσπίπτει μια διαταραχή $u(\tilde{\mathbf{x}}, t)$, μπορούμε να γράψουμε με τους ανάστροφους μετασχηματισμούς Fourier

$$u(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\tilde{\mathbf{x}}, \nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$$

$$u(\mathbf{x}', t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\mathbf{x}', \nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$$

με $U(\tilde{\mathbf{x}}, \nu)$ και $U(\mathbf{x}', \nu)$ τα φάσματα Fourier. Με αλλαγή μεταβλητής $\nu' = -\nu$, έχουμε

$$u(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\tilde{\mathbf{x}}, -\nu') e^{-2i\pi\nu' t} d\nu'$$

$$u(\mathbf{x}', t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\mathbf{x}', -\nu') e^{-2i\pi\nu' t} d\nu'$$

που μας δίνουν τις πολυχρωματικές συναρτήσεις $u(\tilde{\mathbf{x}}, t)$ και $u(\mathbf{x}', t)$ σαν γραμμικό συνδυασμό μονοχρωματικών χρονικών συναρτήσεων του είδους $e^{-2i\pi\nu' t}$ με μιγαδικά πλάτη $U(\tilde{\mathbf{x}}, -\nu')$ και $U(\mathbf{x}', -\nu')$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα από προηγούμενα μέρη, και τη γραμμικότητα του φαινομένου για να βρούμε το πεδίο στο \mathbf{x}' για κάθε μονοχρωματική συνιστώσα και να προσθέσουμε τις συνεισφορές.

Μπορούμε να ξεκινήσουμε από τη βασική σχέση και να γράψουμε

$$U(\mathbf{x}', -\nu') = -i \frac{\nu'}{\nu} \iint_{\Sigma} U(\tilde{\mathbf{x}}, -\nu') e^{2i\pi\nu' r_{01}/\nu} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') dS$$

με ν την ταχύτητα που κινείται η διαταραχή στο μέσο με δείκτη διάθλασης n ($\nu = c/n$) και $\nu'\lambda = \nu$. Αν αντικαταστήσουμε τη παραπάνω στη σχέση

$$u(\mathbf{x}', t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\mathbf{x}', -\nu') e^{-2i\pi\nu' t} d\nu'$$

έχουμε

$$u(\mathbf{x}', t) = \iint_{\Sigma} \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}')}{2\pi\nu r'} dS \int_{-\infty}^{\infty} (-i2\pi\nu') U(\tilde{\mathbf{x}}, -\nu') \exp\left[-2i\pi\nu' \left(t - \frac{r'}{\nu}\right)\right] d\nu'$$

Με την ταυτότητα

$$\frac{d}{dt} u(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} U(\tilde{\mathbf{x}}, -\nu') e^{-2i\pi\nu' t} d\nu' = \int_{-\infty}^{\infty} (-2i\pi\nu') U(\tilde{\mathbf{x}}, -\nu') e^{-2i\pi\nu' t} d\nu'$$

παίρνουμε

$$u(\mathbf{x}', t) = \iint_{\Sigma} \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}')}{2\pi\nu r'} \frac{d}{dt} u\left(\tilde{\mathbf{x}}, t - \frac{r'}{\nu}\right) dS$$

Παρατηρούμε ότι το πεδίο στο \mathbf{x}' είναι μια γραμμική υπέρθεση ανάλογη της χρονικής παραγώγου του πεδίου στο σημείο $\tilde{\mathbf{x}}$. Εφόσον το πεδίο χρειάζεται κάποιο χρονικό διάστημα για να καλύψει την

απόσταση μεταξύ των σημείων \mathbf{x}' και $\tilde{\mathbf{x}}$, το πεδίο που παρατηρούμε εξαρτάται από κάποιο καθυστερημένο πεδίο στο χρόνο.

Τα παραπάνω αποτελέσματα ισχύουν όταν η πηγή έχει ένα αρκετά περιορισμένο φασματικό εύρος εκπομπής.

Περίθλαση στη περίμετρο οπής

Στη θεωρία του Fresnel-Huygens θεωρήσαμε κάθε σημείο της οπής του διαφράγματος σαν μια δευτερεύουσα πηγή σφαιρικών κυμάτων. Αυτή είναι μια μαθηματική διευκόλυνση χωρίς κάποια φυσική σημασία. Για κάποια φυσική εξήγηση, ακολουθούμε την εξήγηση του Young, ο οποίος θεώρησε ότι το πεδίο που παρατηρούμε είναι η υπέρθεση του προσπίπτοντος πεδίου χωρίς επίδραση από την οπή και ενός πεδίου περίθλασης που ξεκινά από την περίμετρο της οπής. Το πεδίο αυτό φαίνεται να πηγάζει από το υλικό που υπάρχει στη περίμετρο της οπής. Η εξήγηση αυτή υποστηρίζεται από την rigorous λύση του η/μ προβλήματος περίθλασης ενός επίπεδου κύματος, από μια ημι-άπειρη και τέλεια αγωγίμη επιφάνεια από τον Sommerfeld. Έδειξε ότι το πεδίο στη γεωμετρική σκιά της οθόνης έχει τη μορφή ενός κυλινδρικού κύματος που πηγάζει από το όριο της επιφάνειας. Το πεδίο που παρατηρούμε είναι έτσι μια υπέρθεση του αρχικού επίπεδου κύματος με το κυλινδρικό αυτό κύμα.

Πολλές διαφορετικές θεωρήσεις έχουν προκύψει για μελέτη της περίθλασης από τις περιμέτρους των διαφραγμάτων. Υπάρχει επίσης και η προσέγγιση της γεωμετρικής οπτικής για την περίθλαση, όπου οι ακτίνες του προσπίπτοντος κύματος συνδυάζονται με τις ακτίνες περίθλασης να πηγάζουν από γωνίες, πλευρές, ακίδες και επιφάνειες του εμποδίου.

Γωνιακό φάσμα από επίπεδα κύματα

Για την βαθμωτή θεωρία περίθλασης μπορούμε να έχουμε ένα πλαίσιο ίδιο με αυτό συστημάτων που είναι γραμμικά και invariant. Αν το μιγαδικό πεδίο ενός μονοχρωματικού κύματος αναλυθεί σε συνιστώσες Fourier σε κάποιο επίπεδο, οι διάφορες χωρικές συνιστώσες που προκύπτουν μπορούμε να τις δούμε σαν επίπεδα κύματα που διαδίδονται σε διαφορετικές κατευθύνσεις από το επίπεδο αυτό.

Τα πλάτη του πεδίου σε οποιοδήποτε άλλο σημείο (ή άλλο παράλληλο επίπεδο) μπορούν να βρεθούν με άθροισμα συνεισφορών των συνιστωσών αυτών.

Από κάποια απροσδιόριστη πηγή μονοχρωματικών κυμάτων, ένα κύμα προσπίπτει στο εγκάρσιο επίπεδο (x, y) και το οποίο διαδίδεται στον z -άξονα. Αν το μιγαδικό πλάτος του πεδίου στο $z = 0$ είναι $U(x, y; 0)$ θέλουμε το πεδίο $U(x, y; z)$ σε μια απόσταση z δεξιά του πρώτου σημείου, και της αρχής των αξόνων, όπως στο σχήμα.

Στο επίπεδο $z = 0$, η συνάρτηση $U(x, y; 0)$ έχει τη μορφή φάσματος

$$A(f_x, f_y; 0) = \iint U(x, y; 0) e^{-2i\pi(f_x x + f_y y)} dx dy$$

Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι μια αποσύνθεση μιας περίπλοκης συνάρτησης σε μια συλλογή από πολλές απλές μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις. Αυτό είναι εμφανές αν δούμε την U σαν τον ανάστροφο μετασχηματισμό Fourier

$$U(x, y; 0) = \iint A(f_x, f_y; 0) e^{2i\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y$$

Αν πάρουμε τη μορφή ενός απλού επίπεδου κύματος που διαδίδεται με κυματόνυσμα \mathbf{k} με $k = 2\pi/\lambda$ και συνημίτονα διεύθυνσης διάδοσης (α, β, γ) τότε μπορούμε να γράψουμε για επίπεδο κύμα

$$p(x, y, z; t) = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - 2\pi\nu t)}$$

με $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ και $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha\hat{x} + \beta\hat{y} + \gamma\hat{z})$. Αγνοώντας το χρονικό μέρος, έχουμε για το μιγαδικό πλάτος φάσης ενός επίπεδου κύματος σε ένα επίπεδο κάθετο στον z -άξονα

$$P(x, y, z) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \gamma z}$$

με $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$. Έτσι για το $z=0$ επίπεδο, η μιγαδική συνάρτηση $e^{2i\pi(f_x x + f_y y)}$ μπορεί να είναι ένα επίπεδο κύμα με συνημίτονο κατεύθυνσης

$$\alpha = \lambda f_x, \beta = \lambda f_y \text{ και } \gamma = \sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2}$$

Στην αποσύνθεση Fourier της U , το μιγαδικό πλάτος της συνιστώσας επιπέδου κύματος με χωρικές συχνότητες (f_x, f_y) είναι $A(f_x, f_y; 0) df_x df_y$ στο σημείο $f_x = \alpha/\lambda, f_y = \beta/\lambda$. Έτσι η συνάρτηση

$$A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; 0) = \iint U(x, y; 0) \exp[-2i\pi(\alpha x/\lambda + \beta y/\lambda)] dx dy$$

είναι το γωνιακό φάσμα της $U(x, y; 0)$.

Αν τώρα η $A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; z)$ είναι το χωρικό γωνιακό φάσμα της $U(x, y; z)$ σε ένα άλλο επίπεδο z , τότε

$$A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; z) = \iint U(x, y; z) \exp[-2i\pi(\alpha x/\lambda + \beta y/\lambda)] dx dy$$

Αν βρούμε τη σχέση μεταξύ της $A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; 0)$ και της $A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; z)$ τότε θα βρούμε και την επίδραση της διάδοσης στο χωρικό φάσμα. Βλέπουμε ότι η $U(x, y; z)$ γράφεται και σαν

$$U(x, y; z) = \iint A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; z) \exp[2i\pi(\alpha x/\lambda + \beta y/\lambda)] d(\alpha/\lambda) d(\beta/\lambda)$$

και πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0$$

σε όλα τα σημεία χωρίς φορτία και ρεύματα. Έτσι η $A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; z)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dz^2} A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; z) + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 [1 - \alpha^2 - \beta^2] A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; z) = 0$$

Μια βασική λύση της παραπάνω είναι η

$$A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; z) = A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; 0) e^{\frac{2i\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z}$$

Το αποτέλεσμα αυτό για $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ (όλα τα συνημίτονα διεύθυνσης ικανοποιούν τη σχέση αυτή), η επίδραση της διάδοσης από μια απόσταση z απλά αλλάζει τις σχετικές φάσεις των διαφόρων συνιστωσών του χωρικού γωνιακού φάσματος. Εφόσον το επίπεδο κύμα διαδίδεται σε διαφορετική γωνία, κάθε ένα διανύει διαφορετική απόσταση μεταξύ των δύο παράλληλων επιπέδων, του διαφράγματος και της παρατήρησης, και έτσι εισέρχονται σχετικές φασικές καθυστερήσεις μεταξύ τους.

Όταν όμως $\alpha^2 + \beta^2 > 1$, έχουμε μια διαφορετική εικόνα. Εφόσον η $A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; 0)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier ενός πεδίου που έχουμε εφαρμόσει τις συνοριακές συνθήκες της οπής, τότε είναι δυνατόν ότι το φάσμα αυτό θα περιέχει συνιστώσες που ικανοποιούν τη παραπάνω σχέση. Τότε τα α και β δεν είναι συνημίτονα κατεύθυνσης, εφόσον η ρίζα είναι φανταστική, και έχουμε

$$A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; z) = A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; 0) e^{-\mu z}$$

με $\mu = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}$ ένα πραγματικό θετικό αριθμό. Τα κύματα αυτά φθίνουν γρήγορα με τη διάδοση στην z -κατεύθυνση. Τέτοιες συνιστώσες είναι τα επιφανειακά κύματα.

Τέλος η διαταραχή στο (x, y, z) μπορεί να γραφεί σε σχέση με το αρχικό γωνιακό χωρικό φάσμα με τον ανάστροφο μετασχηματισμό της $A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; z)$

$$U(x, y; z) = \iint A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right) \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z\right] \times \text{circ}\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) \exp\left[2i\pi\left(\frac{\alpha x}{\lambda} + \frac{\beta y}{\lambda}\right)\right] d\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) d\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)$$

με τη συνάρτηση $\text{circ}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$ να περιορίζει τα όρια του ολοκληρώματος στη περιοχή που επιτρέπεται. Δεν έχουμε καμιά συνιστώσα πέρα από το σημείο αποκοπής του επιφανειακού κύματος στην $U(x, y, z)$. Το γεγονός αυτό είναι και ο βασικός λόγος που κανένα απεικονιστικό σύστημα δεν μπορεί να αναλύσει μια περιοδική δομή με περίοδο μικρότερη από μήκος κύματος της ακτινοβολίας που χρησιμοποιείται. Μπορούμε όμως να έχουμε κάποια ζεύξη με τα επιφανειακά κύματα και να πάρουμε κάποια πληροφορία που συνδέεται με τις δομές αυτές.

Έχοντας τώρα μια άπειρης έκτασης αδιαφανή επιφάνεια στο $z = 0$ με κάποια δομή περίθλασης, θέλουμε να δούμε την επίδραση της στη χωρική γωνιακή φασματική κατανομή του πεδίου. Αν η συνάρτηση διάδοσης πλάτους της οπής είναι ο λόγος του πεδίου που διαδίδεται $U_t(x, y, 0)$ προς το προσπίπτον $U_i(x, y, 0)$ σε κάθε σημείο (x, y) του $z = 0$ επιπέδου

$$t_A(x, y) = \frac{U_t(x, y, 0)}{U_i(x, y, 0)}$$

τότε

$$U_t(x, y, 0) = U_i(x, y, 0)t_A(x, y)$$

και το θεώρημα της συνέλιξης μπορεί να συνδέσει το γωνιακό φάσμα $A_i(\alpha/\lambda, \beta/\lambda)$ του προσπίπτοντος πεδίου με αυτό που διαδίδεται $A_t(\alpha/\lambda, \beta/\lambda)$

$$A_t(\alpha/\lambda, \beta/\lambda) = A_i(\alpha/\lambda, \beta/\lambda) \oplus T_A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda)$$

με

$$T_A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda) = \iint t_A(x, y) \exp[-2i\pi(\alpha x/\lambda + \beta y/\lambda)] dx dy$$

Αν πάρουμε ένα επίπεδο κύμα πλάτους

$$A_i(\alpha/\lambda, \beta/\lambda) = \delta(\alpha/\lambda, \beta/\lambda)$$

τότε

$$A_t(\alpha/\lambda, \beta/\lambda) = \delta(\alpha/\lambda, \beta/\lambda) \oplus T_A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda) = T_A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda)$$

Αν η δομή της περίθλασης είναι μια οπή που περιορίζει την έκταση του πεδίου πρόσπτωσης, το αποτέλεσμα είναι μια διαπλάτυνση του χωρικού γωνιακού φάσματος του πεδίου από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier. Όσο πιο μικρή η οπή, τόσο πιο διαπλατυσμένο το χωρικό φάσμα πίσω από τη οπή. Η συμπεριφορά αυτή είναι ανάλογη της διαπλάτυνσης του φάσματος ενός σήματος όπως η διάρκεια του ελαττώνεται.

Αν δούμε ξανά τη διάδοση από το επίπεδο στο $z = 0$ σε μια απόσταση z , η διαταραχή $U(x, y, 0)$ περνά σε μια νέα κατανομή $U(x, y, z)$ λόγω της διάδοσης, και η διάδοση αυτή θα δείξουμε ότι συμπεριφέρεται σαν ένα γραμμικό space invariant σύστημα και περιγράφεται από μια απλή συνάρτηση μεταφοράς. Έχουμε δει τη γραμμικότητα της διάδοσης παραπάνω, από τη αρχή της υπέρθεσης. Αν μπορέσουμε και παράγουμε μια συνάρτηση μεταφοράς τότε το σύστημα μας είναι invariant.

Γυρίζοντας στο γωνιακό φάσμα σαν συνάρτηση των χωρικών συχνοτήτων $A(f_x, f_y; z)$ της $U(x, y, z)$ σε σχέση με το αρχικό $A(f_x, f_y; 0)$ της $U(x, y, 0)$ έχουμε

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \iint A(f_x, f_y; z) e^{2i\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y \\ &= \iint A(f_x, f_y; 0) \text{circ}\left(\sqrt{(\lambda f_x)^2 + (\lambda f_y)^2}\right) e^{\left[\frac{2i\pi z}{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2}\right]} df_x df_y \end{aligned}$$

ώστε

$$A(f_x, f_y; z) = A(f_x, f_y; 0) \text{circ}\left(\sqrt{(\lambda f_x)^2 + (\lambda f_y)^2}\right) e^{\left[\frac{2i\pi z}{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2}\right]}$$

που μας δίνει μια συνάρτηση μεταφοράς

$$H(f_x, f_y) = \begin{cases} \exp\left[\frac{2i\pi z}{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2}\right] & \sqrt{f_x^2 + f_y^2} < 1/\lambda \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Η διάδοση του πεδίου βλέπουμε ότι είναι ένα γραμμικό χωρικό φίλτρο διασποράς με πεπερασμένο εύρος. Η διαπερατότητα του φίλτρου είναι μηδέν έξω από τη κυκλική περιοχή με ακτίνα $1/\lambda$ στο χώρο των συχνοτήτων. Μέσα στη περιοχή αυτή, το μέτρο της συνάρτησης είναι η μονάδα αλλά εισέρχονται φασικές μεταβολές που εξαρτώνται από τη συχνότητα. Η φασική αυτή διασπορά είναι σημαντική στις υψηλές συχνότητες και τείνει στο μηδέν όπως $f_x, f_y \rightarrow 0$. Για κάθε χωρική συχνότητα η φασική διασπορά της αυξάνει με την απόσταση που διαδίδεται το πεδίο.

Σημειώνουμε ότι αν και οι προσεγγίσεις είναι τελείως διαφορετικές, το γωνιακό χωρικό φάσμα και η πρώτη λύση του Rayleigh-Sommerfeld μας δίνουν την ίδια πρόβλεψη για τα πεδία περίθλασης.